Simplification de sommes

Formules utiles (à connaître par coeur ou à savoir retrouver)

Soient a et b deux entiers tels que $a \leq b$ et soit $f(i)$ la valeur de chaque terme de notre somme[1], qui dépend (ou pas) de i.

Par exemple, pour

$$\sum_{i=0}^{n} i^2,$$

on note : $f(i) = i^2$, $a = 0$, $b = n$.

On a alors les propriétés suivantes:

$$\sum_{i=a}^{b} 1 = b - a + 1$$

Si c est une constante:

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c \sum_{i=a}^{b} f(i) \tag{1}$$

$$\sum_{i=a}^{b} (f(i) + g(i)) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i)$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=0}^{b} f(i) - \sum_{i=0}^{a-1} f(i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Portée des variables

Attention, n'oubliez jamais l'ordre et la portée des variables des sommes.

Par exemple, on peut écrire:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij = \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{i} j \right).$$

Parce que, du point de vue de la somme à l'intérieur, la variable i existe déjà et ne bouge pas, donc on peut appliquer la propriété (1). Mais on a pas le droit de faire :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij \neq \sum_{i=0}^{n} \left(j \sum_{j=0}^{i} i \right)$$

Puisque la variable j est uniquement définie à l'intérieur de la deuxième somme.

[1] formellement f est une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mais n'y pensez pas si ce n'est pas clair pour vous