Introduction aux Mathématiques Appliquées

April 14, 2022

Plan

Plan

1. La démarche des mathématiques appliquées et distinction avec la physique
2. Modélisation et EDP
3. Discrétisation et Approximation
4. Conclusion, ouvertures et orientation

La démarche des mathématiques appliquées

- Les mathématiques sont un outil merveilleux.

La démarche des mathématiques appliquées

- Les mathématiques sont un outil merveilleux.
- On a pu développer une quantité phénoménale de concepts surpuissants, ce serait bien de pouvoir s'en servir! Dans l'industrie, dans nos ordinateurs, etc...

La démarche des mathématiques appliquées

- Les mathématiques sont un outil merveilleux.
- On a pu développer une quantité phénoménale de concepts surpuissants, ce serait bien de pouvoir s'en servir! Dans l'industrie, dans nos ordinateurs, etc...
- Ce qui nous en empêche: il y a une différence pronfonde entre les maths et le monde réel.

Il y a plus de nombres entre 0 et 1 qu'il n'y a d'atomes dans l'univers observable. *Notre monde est fondamentalement fini et discret,* alors qu'en tant que matheux, on jongle avec l'infini et le continu tous les jours sur des bouts de papier.

La démarche des mathématiques appliquées

- Les mathématiques sont un outil merveilleux.
- On a pu développer une quantité phénoménale de concepts surpuissants, ce serait bien de pouvoir s'en servir! Dans l'industrie, dans nos ordinateurs, etc...
- Ce qui nous en empêche: il y a une différence pronfonde entre les maths et le monde réel.

Il y a plus de nombres entre 0 et 1 qu'il n'y a d'atomes dans l'univers observable. *Notre monde est fondamentalement fini et discret,* alors qu'en tant que matheux, on jongle avec l'infini et le continu tous les jours sur des bouts de papier.

- Dépasser cet obstacle *c'est le rôle des maths appliquées!*

La démarche des mathématiques appliquées

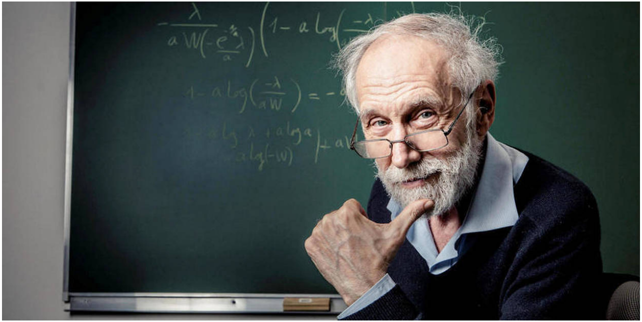
- Les mathématiques sont un outil merveilleux.
- On a pu développer une quantité phénoménale de concepts surpuissants, ce serait bien de pouvoir s'en servir! Dans l'industrie, dans nos ordinateurs, etc...
- Ce qui nous en empêche: il y a une différence pronfonde entre les maths et le monde réel.

Il y a plus de nombres entre 0 et 1 qu'il n'y a d'atomes dans l'univers observable. *Notre monde est fondamentalement fini et discret,* alors qu'en tant que matheux, on jongle avec l'infini et le continu tous les jours sur des bouts de papier.

- Dépasser cet obstacle *c'est le rôle des maths appliquées!*

  C'est pas de la physique ça? Non!

Les maths et la physique: une grande histoire d'amour



Alain Connes: *Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté l'arithmétique, et, d'un autre, la physique.*

Différence de démarches

Une chaîne d'approximations:

$$\boxed{\text{Réalité}} \xrightarrow{\text{Physique}} \boxed{\text{Modèles}} \xrightarrow{\text{Maths Appli.}} \boxed{\text{Calcul}}$$

Une physicienne observe la réalité et essaye de trouver un modèle qui reproduise bien ses observations.

Différence de démarches

Une chaîne d'approximations:

$$\boxed{\text{Réalité}} \xrightarrow{\text{Physique}} \boxed{\text{Modèles}} \xrightarrow{\text{Maths Appli.}} \boxed{\text{Calcul}}$$

Une physicienne observe la réalité et essaye de trouver un modèle qui reproduise bien ses observations.

Le rôle de la physique est de produire des modèles qui permettent d'étudier la réalité par les mathématiques.

Différence de démarches

Une chaîne d'approximations:

$$\text{Réalité} \xrightarrow{\text{Physique}} \text{Modèles} \xrightarrow{\text{Maths Appli.}} \text{Calcul}$$

Une physicienne observe la réalité et essaye de trouver un modèle qui reproduise bien ses observations.

Le rôle de la physique est de produire des modèles qui permettent d'étudier la réalité par les mathématiques.

Le rôle des maths appliquées est de permettre de se servir de ces modèles par des calculs, notamment pour faire des simulations.

Différence de démarches

Une chaîne d'approximations:

$$\boxed{\text{Réalité}} \xrightarrow{\text{Physique}} \boxed{\text{Modèles}} \xrightarrow{\text{Maths Appli.}} \boxed{\text{Calcul}}$$

Une physicienne observe la réalité et essaye de trouver un modèle qui reproduise bien ses observations.

Le rôle de la physique est de produire des modèles qui permettent d'étudier la réalité par les mathématiques.

Le rôle des maths appliquées est de permettre de se servir de ces modèles par des calculs, notamment pour faire des simulations.

Ce n'est pas le rôle des maths appliquées de juger de la qualité du modèle, mais c'est important de le comprendre pour avoir l'intuition!

Plan

Un exemple de modèle: la mécanique des fluides

L'équation d'Euler:
$v(x, t)$ donne la vitesse d'une particule de fluide à l'emplacement x au temps t.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + f$$

Premier modèle qui décrit le mouvement d'un fluide.

Un exemple de modèle: la mécanique des fluides

L'équation d'Euler:

$v(x, t)$ donne la vitesse d'une particule de fluide à l'emplacement x au temps t.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + f$$

Premier modèle qui décrit le mouvement d'un fluide.

Historiquement, on se rend vite compte des limites du modèle:

Les oiseaux ne pourraient pas voler!

Un exemple de modèle: la mécanique des fluides

L'équation d'Euler:

$v(x,t)$ donne la vitesse d'une particule de fluide à l'emplacement x au temps t.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + f$$

Premier modèle qui décrit le mouvement d'un fluide.

Historiquement, on se rend vite compte des limites du modèle:

Les oiseaux ne pourraient pas voler!

Equation améliorée par Navier et Stokes, ça marche extrêmement bien!

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v) = -\nabla p + \mu \Delta v + f$$

Un exemple de modèle: la mécanique des fluides

L'équation d'Euler:

$v(x,t)$ donne la vitesse d'une particule de fluide à l'emplacement x au temps t.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + f$$

Premier modèle qui décrit le mouvement d'un fluide.

Historiquement, on se rend vite compte des limites du modèle:

Les oiseaux ne pourraient pas voler!

Equation améliorée par Navier et Stokes, ça marche extrêmement bien!

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v) = -\nabla p + \mu \Delta v + f$$

Problème: Complètement impossible à résoudre explicitement!

Un exemple de modèle: la mécanique des fluides

L'équation d'Euler:
$v(x,t)$ donne la vitesse d'une particule de fluide à l'emplacement x au temps t.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\nabla p + f$$

Premier modèle qui décrit le mouvement d'un fluide.

Historiquement, on se rend vite compte des limites du modèle:

Les oiseaux ne pourraient pas voler!

Equation améliorée par Navier et Stokes, ça marche extrêmement bien!

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v) = -\nabla p + \mu \Delta v + f$$

Problème: Complètement impossible à résoudre explicitement!

$\Longrightarrow$ Nécéssité d'approximation pour pouvoir calculer et simuler!

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

Introduction à la modélisation et aux EDP

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x, t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.

Introduction à la modélisation et aux EDP

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x, t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.
- J'en sais rien, par contre je crois que je vois bien comment évolue la température.

Introduction à la modélisation et aux EDP

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x, t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.
- J'en sais rien, par contre je crois que je vois bien comment évolue la température.
- Partons d'observations:

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x, t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.
- J'en sais rien, par contre je crois que je vois bien comment évolue la température.
- Partons d'observations:

Equation fondamentale de la termodynamique

Eau chaude + Eau froide = Eau tiède

Si mes voisins sont plus chauds que moi, je me réchauffe, sinon je refroidis.

Introduction à la modélisation et aux EDP

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x, t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.
- J'en sais rien, par contre je crois que je vois bien comment évolue la température.
- Partons d'observations:

Equation fondamentale de la termodynamique

Eau chaude + Eau froide = Eau tiède

Si mes voisins sont plus chauds que moi, je me réchauffe, sinon je refroidis.

- C'est à dire, je ne connais pas T mais je connais $\frac{\partial T}{\partial t}$

Tentons de construire un modèle qui décrive la température d'une barre métalique dans le temps, étant donnée la température initiale.

- On cherche une fonction $T(x,t)$ qui nous donne la température au point x à l'instant t.
- J'en sais rien, par contre je crois que je vois bien comment évolue la température.
- Partons d'observations:

Equation fondamentale de la termodynamique

Eau chaude + Eau froide = Eau tiède

Si mes voisins sont plus chauds que moi, je me réchauffe, sinon je refroidis.

- C'est à dire, je ne connais pas T mais je connais $\frac{\partial T}{\partial t}$
- En tout point x, je sais que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \text{"écart à la moyenne des températures de mes voisins"}$$

Traduire l'écart à la moyenne

Pour une fonction réelle, f, qu'on suppose $\mathcal{C}^2$: On peut exprimer ainsi l'écart à la moyenne par rapport à ses voisins à une distance h.

$$\text{"Ecart à la moyenne"} = \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)) - f(x)$$

Traduire l'écart à la moyenne

Pour une fonction réelle, f, qu'on suppose $\mathcal{C}^2$: On peut exprimer ainsi l'écart à la moyenne par rapport à ses voisins à une distance h.

$$\text{"Ecart à la moyenne"} = \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)) - f(x)$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{2}(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x)) - f(x) \\
&= f(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - f(x) \\
&= \frac{h^2}{2}f''(x)
\end{aligned}$$

Traduire l'écart à la moyenne

Pour une fonction réelle, f, qu'on suppose $\mathcal{C}^2$: On peut exprimer ainsi l'écart à la moyenne par rapport à ses voisins à une distance h.

$$\text{"Ecart à la moyenne"} = \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)) - f(x)$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{2}(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x)) - f(x) \\
&= f(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - f(x) \\
&= \frac{h^2}{2}f''(x)
\end{aligned}$$

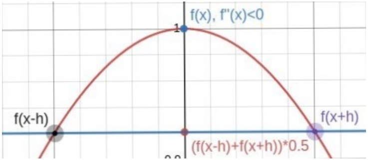
- C'est la dérivée seconde qui exprime l'écart à la moyenne local d'une fonction! (Pour l'instant on omet le facteur $\frac{h^2}{2}$ car il est normal que l'écart devienne nul quand je considère des voisins de plus en plus proches)

La signification de la dérivée seconde

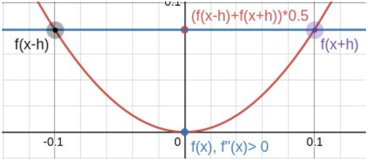
à retenir

La dérivée seconde "en espace" permet de mesurer l'écart entre la valeur d'une fonction en un point par rapport à son voisinage.

Fonction concave f'' < 0:



Fonction convexe f'' > 0:



Si la dérivée seconde est positive alors mes voisins sont plus grands que moi, si la dérivée seconde est négative alors ils sont plus petits que moi.

Pour notre modèle de la chaleur

Si mes voisins sont plus chauds que moi alors je chauffe, si mes voisins sont plus froids que moi alors je refroidis.

On a notre modèle!

On modélise donc l'évolution de la chaleur en un point ainsi:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \text{ "écart à la moyenne des températures de mes voisins"}$$
$$\iff \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

On a notre modèle!

On modélise donc l'évolution de la chaleur en un point ainsi:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \text{ "écart à la moyenne des températures de mes voisins"} \\
\iff & \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

Ce modèle est très connu!

On a notre modèle!

On modélise donc l'évolution de la chaleur en un point ainsi:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \text{"écart à la moyenne des températures de mes voisins"}$$

$$\iff \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce modèle est très connu!

- Ce modèle traduit bien nos observations: si on se place sur un x fixé:
  - si mes voisins sont plus chauds que moi $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) > 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) > 0$ donc ma température va augmenter dans le temps.
  - à l'inverse si mes voisins sont plus froids que moi $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) < 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) < 0$ donc ma température va diminuer dans le temps.

On a notre modèle!

On modélise donc l'évolution de la chaleur en un point ainsi:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \text{ "écart à la moyenne des températures de mes voisins"}$$
$$\iff \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce modèle est très connu!

- Ce modèle traduit bien nos observations: si on se place sur un x fixé:
  - si mes voisins sont plus chauds que moi $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) > 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) > 0$ donc ma température va augmenter dans le temps.
  - à l'inverse si mes voisins sont plus froids que moi $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) < 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) < 0$ donc ma température va diminuer dans le temps.
- C'est bien ce qu'on voulait, on a réussi!

Vérifions que ça fonctionne

On peut trouver "facilement" une solution évidente:

$$T(x,t) = \sin(x)e^{-t}$$

On a bien

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = -sin(x)e^{-t}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = -sin(x)e^{-t}$$

Voyons à quoi ça ressemble quand t varie:

Vous êtes trop contents!!

- Ca y est on a notre modèle, à nous la simulation, l'argent facile!

Vous êtes trop contents!!

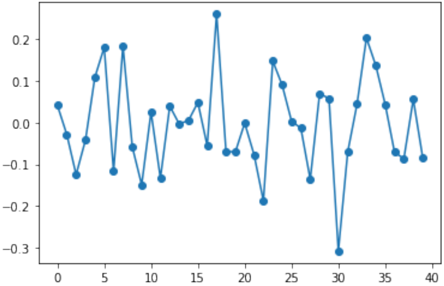
- Ca y est on a notre modèle, à nous la simulation, l'argent facile!
- Vous postulez dans une grande entreprise de prédiction de la température de barres métalliques:

Vous êtes trop contents!!

- Ca y est on a notre modèle, à nous la simulation, l'argent facile!
- Vous postulez dans une grande entreprise de prédiction de la température de barres métalliques:
- Vous avez le job!

Vous êtes trop contents!!

- Ca y est on a notre modèle, à nous la simulation, l'argent facile!
- Vous postulez dans une grande entreprise de prédiction de la température de barres métalliques:
- Vous avez le job!
- Premier jour de boulot:
  Un client arrive avec ça comme température initiale:



On s'est réjouit trop vite... Retour à Pôle emploi...

Plan

Discrétisation

L'enjeu de la discrétisation c'est de trouver la meilleure approximation finie d'un objet infini.

Discrétisation

L'enjeu de la discrétisation c'est de trouver la meilleure approximation finie d'un objet infini.

- Dans notre cas, comment bien approximer une fonction définie sur un intervalle par un nombre fini de valeurs?

Discrétisation

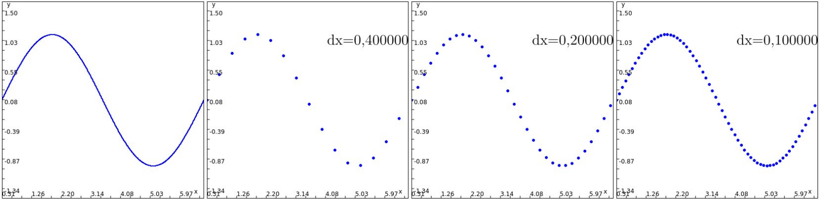
L'enjeu de la discrétisation c'est de trouver la meilleure approximation finie d'un objet infini.

- Dans notre cas, comment bien approximer une fonction définie sur un intervalle par un nombre fini de valeurs?
- Plusieurs solutions possibles: troncature de séries de fourier, ou du développement en série entière, etc...

Discrétisation

L'enjeu de la discrétisation c'est de trouver la meilleure approximation finie d'un objet infini.

- Dans notre cas, comment bien approximer une fonction définie sur un intervalle par un nombre fini de valeurs?
- Plusieurs solutions possibles: troncature de séries de fourier, ou du développement en série entière, etc...
- On va faire le plus simple: échantillioner.



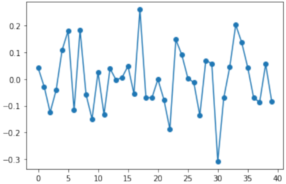
On fixe "un pas" dx et on prend la valeur de la fonction tous les dx

Comment représenter un échantillion?

Comme alors on a dorénavant N valeurs on a "résumé" notre fonction à un ensemble fini.

Comme alors on a dorénavant N valeurs on a "résumé" notre fonction à un ensemble fini.

- La bonne idée: stocker ces valeurs dans un vecteur.



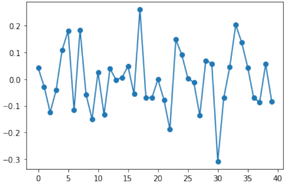
$$\Longrightarrow \hat{f} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.11 \\ \vdots \\ 0.05 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1)) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Où, $x_n = x_0 + ndx$.

Comment représenter un échantillion?

Comme alors on a dorénavant N valeurs on a "résumé" notre fonction à un ensemble fini.

- La bonne idée: stocker ces valeurs dans un vecteur.



$$\implies \hat{f} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.11 \\ \vdots \\ 0.05 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1)) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

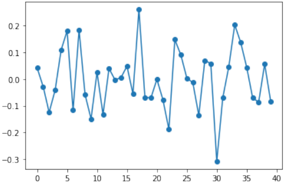
Où, $x_n = x_0 + ndx$.

- Ca résoud déjà notre problème avec le client!

Comment représenter un échantillion?

Comme alors on a dorénavant N valeurs on a "résumé" notre fonction à un ensemble fini.

- La bonne idée: stocker ces valeurs dans un vecteur.



$$\Longrightarrow \hat{f} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ -0.11 \\ \vdots \\ 0.05 \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1)) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Où, $x_n = x_0 + ndx$.

- Ca résoud déjà notre problème avec le client!
- On a fait la moitié du boulot, on a discrétisé les fonctions, il reste à discrétiser les opérateurs différentiels (dérivées, etc...)

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).
- De plus, la dérivée est un opérateur linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).
- De plus, la dérivée est un opérateur linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

Puisqu'on représente désormais nos "fonctions" par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on cherche donc un équivalent discret à la dérivée :

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).
- De plus, la dérivée est un opérateur linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

Puisqu'on représente désormais nos "fonctions" par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on cherche donc un équivalent discret à la dérivée :

  - linéaire

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).
- De plus, la dérivée est un opérateur linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

  Puisqu'on représente désormais nos "fonctions" par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on cherche donc un équivalent discret à la dérivée :
  - linéaire
  - qu'on puisse appliquer à un échantillion pour obtenir une bonne approximation de la dérivée de la fonction échantillionée.
    Donc de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$D\hat{f} \approx \hat{f}'$$

Discrétiser la dérivée: Un nouvel espoir...

Pour rappel:

- Une fonction est un élément d'un espace vectoriel (par exemple l'espace $\mathcal{C}^\infty$).
- De plus, la dérivée est un opérateur linéaire:

$$\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

Puisqu'on représente désormais nos "fonctions" par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on cherche donc un équivalent discret à la dérivée :

- linéaire
- qu'on puisse appliquer à un échantillion pour obtenir une bonne approximation de la dérivée de la fonction échantillionée. Donc de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$D\hat{f} \approx \hat{f}'$$

$\implies$ Des matrices!!!

Discrétiser la dérivée

Reprenons la définition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Discrétiser la dérivée

Reprenons la définition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Comme on ne peut plus faire tendre h vers 0, on va juste prendre h le plus petit possible, donc $h = dx$.

Discrétiser la dérivée

Reprenons la définition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Comme on ne peut plus faire tendre h vers 0, on va juste prendre h le plus petit possible, donc $h = dx$.

- Donc:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Discrétiser la dérivée

Par exemple, au point x_i:

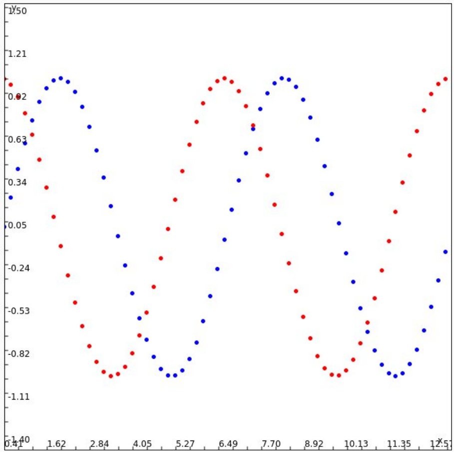
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + dx) - f(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{dx}$$

Si on regarde l'effet de la "dérivée" sur notre échantillion:

$$\hat{f}' = \begin{pmatrix} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{dx} \\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{dx} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{dx} \begin{pmatrix} f(x_1) - f(x_0) \\ f(x_2) - f(x_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{dx} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \\ 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \end{pmatrix} = D\hat{f}$$

Ca fonctionne bien!



En bleu c'est l'échantillion de sin, en rouge c'est l'échantillion auquel on applique *D*, on voit que ça donne une bonne approximation de *cos*.

Revenons à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Revenons à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- On a besoin de la discrétisation de la dérivée seconde en x.

Revenons à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- On a besoin de la discrétisation de la dérivée seconde en x.
- En fait on l'a déjà fait!

$$\frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)) - f(x) \approx f''(x)\frac{h^2}{2}$$
$$\iff f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Revenons à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- On a besoin de la discrétisation de la dérivée seconde en x.
- En fait on l'a déjà fait!

$$\frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)) - f(x) \approx f''(x)\frac{h^2}{2}$$
$$\iff f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

- En termes matriciels:

$$\hat{f''} = \frac{1}{dx^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & \dots & \\ 1 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}\hat{f} = L\hat{f}$$

Discrétiser l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour l'instant, on avait juste découpé l'intervalle des x pour calculer nos dérivées.
On doit donc faire pareil pour le temps (t),avec un pas dt, mais on ne connait que $\hat{T}(0, x)$!

Discrétiser l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour l'instant, on avait juste découpé l'intervalle des x pour calculer nos dérivées.
On doit donc faire pareil pour le temps (t),avec un pas dt, mais on ne connait que $\hat{T}(0, x)$!

- On représente l'évolution dans le temps par une suite:

$$\hat{T}_i^n = \hat{T}(ndt, x_i)$$

Discrétiser l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pour l'instant, on avait juste découpé l'intervalle des x pour calculer nos dérivées.
On doit donc faire pareil pour le temps (t),avec un pas dt, mais on ne connait que $\hat{T}(0,x)$!

- On représente l'évolution dans le temps par une suite:

$$\hat{T}_i^n = \hat{T}(ndt, x_i)$$

- Chaque terme de la suite est donc un vecteur qui représente notre approximation de la solution au temps ndt.

Discrétiser l'équation de la chaleur

à $t = 0$ par exemple:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(0, x) &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0, x) \\
\approx \frac{\hat{T}(0 + dt, x) - \hat{T}(0, x)}{dt} &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0, x) \\
\approx \frac{\hat{T}^1 - \hat{T}^0}{dt} &= L\hat{T}^0
\end{aligned}
$$

Discrétiser l'équation de la chaleur

à $t = 0$ par exemple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(0,x) &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}(0+dt,x) - \hat{T}(0,x)}{dt} &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}^1 - \hat{T}^0}{dt} &= L\hat{T}^0 \end{aligned}$$

On cherche $\hat{T}^1$:

$$\hat{T}^1 = \hat{T}^0 + dtL\hat{T}^0$$

Discrétiser l'équation de la chaleur

à $t = 0$ par exemple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(0,x) &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}(0+dt,x) - \hat{T}(0,x)}{dt} &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}^1 - \hat{T}^0}{dt} &= L\hat{T}^0 \end{aligned}$$

On cherche $\hat{T}^1$:

$$\hat{T}^1 = \hat{T}^0 + dtL\hat{T}^0$$

A l'étape n:

$$\hat{T}^{n+1} = \hat{T}^n + dtL\hat{T}^n \implies \hat{T}^n = (I + dtL)^n\hat{T}^0$$

Discrétiser l'équation de la chaleur

à $t = 0$ par exemple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(0,x) &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}(0+dt,x) - \hat{T}(0,x)}{dt} &= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2}(0,x) \\ \approx \frac{\hat{T}^1 - \hat{T}^0}{dt} &= L\hat{T}^0 \end{aligned}$$

On cherche $\hat{T}^1$:

$$\hat{T}^1 = \hat{T}^0 + dtL\hat{T}^0$$

A l'étape n:

$$\hat{T}^{n+1} = \hat{T}^n + dtL\hat{T}^n \implies \hat{T}^n = (I + dtL)^n \hat{T}^0$$

- Ca y est: on a réussi! Voyons ce que ça donne!

Enfin des simulations!

Faisons varier dt.

Enfin des simulations!

Faisons varier dt.

- Pour dt trop grand, ça casse!

Enfin des simulations!

Faisons varier dt.

- Pour dt trop grand, ça casse!

  Pour des questions de rayon spectral, cette méthode marche mieux:

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{T}^{n+1} - \hat{T}^{n}}{dt} &= L\hat{T}^{n+1} \\
\implies \hat{T}^{n+1} &= \hat{T}^{n} + dtL\hat{T}^{n+1} \\
\implies (I - dtL)\hat{T}^{n+1} &= \hat{T}^{n}
\end{aligned}
$$

Enfin des simulations!

Faisons varier dt.

- Pour dt trop grand, ça casse!

  Pour des questions de rayon spectral, cette méthode marche mieux:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}^{n+1} - \hat{T}^n}{dt} &= L\hat{T}^{n+1} \\ \implies \hat{T}^{n+1} &= \hat{T}^n + dtL\hat{T}^{n+1} \\ \implies (I - dtL)\hat{T}^{n+1} &= \hat{T}^n \end{aligned}$$

- Ca implique de résoudre un système linéaire à chaque itération (le calcul de l'inverse étant vite exclu), mais c'est beaucoup plus stable!

Plan

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

- On a observé le comportement que l'on souhaitait simuler

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

- On a observé le comportement que l'on souhaitait simuler
- On a traduit ce comportement dans un modèle continu

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

- On a observé le comportement que l'on souhaitait simuler
- On a traduit ce comportement dans un modèle continu
- On a discrétisé notre modèle afin de pouvoir faire des simulations

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

- On a observé le comportement que l'on souhaitait simuler
- On a traduit ce comportement dans un modèle continu
- On a discrétisé notre modèle afin de pouvoir faire des simulations
- On s'est enfin poser des questions sur la convergence de notre approximation.

Récapitulons

Reprenons les étapes de notre raisonnement:

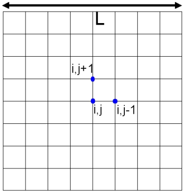
- On a observé le comportement que l'on souhaitait simuler
- On a traduit ce comportement dans un modèle continu
- On a discrétisé notre modèle afin de pouvoir faire des simulations
- On s'est enfin poser des questions sur la convergence de notre approximation.

  En pratique c'est la dernière étape qui nous occupe le plus et qui est d'une importance capitale! Approximer c'est bien mais dire à quel point on se trompe c'est mieux!

Les questions qui restent : En plus haute dimension

On a uniquement considéré le cas 1D mais en 2D,3D?

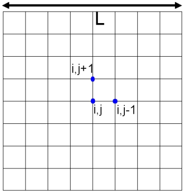
On a uniquement considéré le cas 1D mais en 2D,3D?



On peut juste se dire qu'on découpe l'espace en x et en y.

Les questions qui restent : En plus haute dimension

On a uniquement considéré le cas 1D mais en 2D,3D?

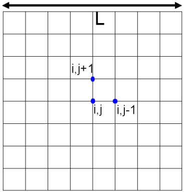


On peut juste se dire qu'on découpe l'espace en x et en y.

D'accord mais pour des formes plus compliquées? Un cercle? Un tore?

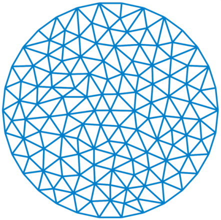
Les questions qui restent : En plus haute dimension

On a uniquement considéré le cas 1D mais en 2D,3D?



On peut juste se dire qu'on découpe l'espace en x et en y.

D'accord mais pour des formes plus compliquées? Un cercle? Un tore?



C'est ce qu'on appelle un maillage, ça implique de nouvelles méthodes, par exemple la méthode des éléments finis, la plus utilisée dans l'industrie!

Les questions qui restent : On peut tout simuler comme ça?

Peut t-on approximer n'importe quelle EDP avec cette méthode?

Peut t-on approximer n'importe quelle EDP avec cette méthode?

- Non malheuresement, cette méthode se limite aux EDP linéaires, par exemple, Navier-Stokes ne l'est pas et demande plus de travail.

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v) = -\nabla p + \mu \Delta v + f$$

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:
    - Exemple: la finance, rien n'est aléatoire mais tellement irrégulier et imprévisible que l'aléatoire marche très bien.

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:
  - Exemple: la finance, rien n'est aléatoire mais tellement irrégulier et imprévisible que l'aléatoire marche très bien.
- On a besoin des statistiques et de l'IA quand on a pas de modèle mais tellement de données qu'on peut essayer de le deviner.

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:
  - Exemple: la finance, rien n'est aléatoire mais tellement irrégulier et imprévisible que l'aléatoire marche très bien.
- On a besoin des statistiques et de l'IA quand on a pas de modèle mais tellement de données qu'on peut essayer de le deviner.
  - Le "vrai nom" de l'IA, c'est l'apprentissage statistique.

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:
  - Exemple: la finance, rien n'est aléatoire mais tellement irrégulier et imprévisible que l'aléatoire marche très bien.
- On a besoin des statistiques et de l'IA quand on a pas de modèle mais tellement de données qu'on peut essayer de le deviner.
  - Le "vrai nom" de l'IA, c'est l'apprentissage statistique.
- C'est beaucoup plus évident qu'on a besoin de l'optimisation pour minimiser un côut de production par exemple, mais aussi dans des domaines plus surprenants:

Un mot sur le reste des Maths Applis

Dans les programmes de tous les masters de maths appliquées vous trouverez des probabilités, des stats et de l'optimisation:

- On a besoin des probabilités quand un comportement devient tellement complexe et imprévisible que l'aléatoire en devient une bonne approximation:
  - Exemple: la finance, rien n'est aléatoire mais tellement irrégulier et imprévisible que l'aléatoire marche très bien.
- On a besoin des statistiques et de l'IA quand on a pas de modèle mais tellement de données qu'on peut essayer de le deviner.
  - Le "vrai nom" de l'IA, c'est l'apprentissage statistique.
- C'est beaucoup plus évident qu'on a besoin de l'optimisation pour minimiser un côut de production par exemple, mais aussi dans des domaines plus surprenants:
  - Par exemple, trouver la répartition de métal dans une porte de voiture pour maximiser la résistance tout en minimisant le poids.

Conclusion et références

- Les mathématiques appliquées est un domaine très vaste, extrêmement riche.
- Ca reste des maths! Etudier la convergence des méthodes ça reste de l'analyse fine, etc...
- Beaucoup de débouchés, dans le public et dans le privé.
- Lyon 1 propose un master destiné à la recherche et 2 master à visée professionnelle.
- Deux références: